



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea Specialistica in Matematica

Sintesi

Tartarughe, specchi ed algoritmi

Dal laboratorio di calcolo alla matematica rigorosa:

una proposta didattica

Relatore

Prof. Corrado Falcolini

Candidato

Chiara Fratini

Parole chiave: calcolo infinitesimale, geometria iperbolica, didattica della matematica, algoritmi.

MRcode: 01A20, 97D40

Anno Accademico 2010-2011

Sintesi

Secondo gli stereotipi della nostra cultura, la matematica appartiene a un mondo arido, fatto prettamente di numeri, funzioni, forme geometriche; un mondo che richiede un rigore logico, precisione, razionalità e non lascia spazio alla creatività e alla fantasia. In realtà, se si osserva la matematica a fondo, ci si rende conto che il processo percettivo - conoscitivo - formativo del matematico coinvolge aspetti che sono tutt'altro che logici e razionali bensì di tipo creativo, motivo per cui i grandi matematici sono degli eclettici, ovvero non si occupano solo di questa scienza ma anche di altre, tra cui la filosofia. Un esempio di questo è dato dalle parole del matematico, fisico teorico e filosofo naturale francese, Henri Poincaré (1854 - 1912) con le quali spiega la sua esperienza creativa:

Quel che più lascia colpiti è il fenomeno di queste improvvise illuminazioni, segno manifesto di un lungo lavoro inconscio precedente, il ruolo di questo lavoro inconscio nell'invenzione matematica mi pare incontestabile[...]. Spesso quando si lavora ad un problema difficile, la prima volta che ci si mette all'opera non si combina nulla di buono; a questo punto ci si concede un periodo di riposo più o meno lungo, per poi sedersi di nuovo a tavolino. Per la prima mezz'ora si continua a non trovare nulla, ma poi, tutt'a un tratto, viene in mente l'idea risolutiva. Verrebbe da dire che il lavoro cosciente è stato più proficuo perché lo si è interrotto e il riposo ha dato vigore e freschezza alle facoltà mentali, è invece più probabile che nel corso di quel periodo di riposo si sia svolto un lavoro incoscio, il cui frutto si è rivelato solo in un secondo tempo¹.

Possiamo quindi dedurre che la ricerca matematica non è un puro esercizio razionale, di conseguenza non può esserlo il processo che porta a conoscerla. Nel modo in cui spesso viene insegnata nelle scuole, la matematica viene considerata

¹Jules Henri Poincaré, *Science and méthode*, Flammarion, Paris 1908; t.i. *Scienza e metodo*, a cura di Claudio Bartocci, Einaudi, Torino 1997

come un insieme di regole e formule che bisogna imparare e saper applicare; è così che i ragazzi forniscono le risposte che l'insegnante si aspetta, risolvendo esercizi del tutto simili a quelli proposti durante le ore di lezione, senza riflettere nè porsi domande. In questa tesi si vuole proporre un 'modo di fare matematica' in cui venga coinvolta anche la fantasia dei ragazzi e si cercherà di assegnare un ruolo attivo allo studente che impara sperimentando e non solo studiando la teoria. Sono infatti gli errori, i tentativi andati a vuoto e la soddisfazione finale di aver risolto un problema a far crescere dentro ogni individuo la capacità esplorativa e critica per interpretare la matematica. La matematica non è una scienza empirica, ha un forte legame con la realtà, infatti pur trattando oggetti astratti nasce dal rapporto dell'uomo con il reale. Poiché l'astrazione è una capacità che si forma gradualmente, partendo dalle esperienze che si effettuano fin da bambini interagendo con il mondo, la matematica che si insegna nelle scuole deve rapportarsi con il vissuto degli alunni. E' importante abituare i ragazzi a lavorare anche senza numeri, utilizzando solo immagini geometriche, simboli, l'algebra, cosicché gli studenti riescano a rappresentare e manipolare gli oggetti geometrici senza perderne il significato, in modo che questo procedimento possa poi essere riutilizzato e generalizzato. Oggi la tecnologia offre strumenti nuovi che possono aiutare a lavorare in questa direzione. Nello specifico i software geometrici forniscono una rappresentazione più concreta degli oggetti geometrici, aiutando a superare sia le difficoltà d'astrazione, che di manipolazione delle stesse rappresentazioni. Con questi tipi di software, gli studenti possono 'giocare' con la matematica, manipolare figure, assemblare oggetti differenti, così da intuire e sperimentare direttamente leggi e proprietà geometriche e, allo stesso tempo, mantenere viva l'attenzione e l'interesse. In questo lavoro i software utilizzati sono *Geogebra* e *Mathematica*: il primo molto intuitivo, non necessita di alcuna conoscenza del linguaggio di programmazione e inoltre può essere scaricato gratuitamente dal web; il secondo invece richiede un minimo di conoscenza del linguaggio di programmazione ma possiede una potenza grafica e computazionale maggiore.

Questa tesi nasce dall'idea, da anni portata avanti dal professore Corrado Falcolini, di creare dei percorsi didattici da proporre nelle scuole, che avvicinino gli studenti alla matematica attraverso l'uso del computer e che permettano di affrontare con maggiore concretezza argomenti raramente trattati, o solamente accennati, durante le ore di lezione. Inizialmente viene proposta una carrellata degli strumenti utilizzati per la didattica della matematica nelle scuole:

- **Libri di testo** ricchi di colori e immagini con lo scopo di stimolare la creatività e l'intuizione dei ragazzi, e correlati di attività laboratoriali e da svolgere online;
- **LIM** la cui potenzialità è nella visualizzazione in grande, l'utilizzo delle tecnologie a favore di tutta la classe, la semplificazione dei concetti, l'interattività e l'aggregazione di risorse multimediali;
- **Progetto lauree scientifiche** nato dalla necessità di rendere lo studio delle discipline scientifiche più attraente, basato su diverse attività:
 - Laboratori;
 - Gare Matematiche;
 - Aggiornamento e formazione degli insegnanti;
 - Seminari e visite guidate;
- **Laboratori informatici** permettono di 'manipolare' gli oggetti matematici, e renderli meno astratti per gli alunni.

Successivamente vengono presentati due percorsi didattici, il primo riguardante le geometrie non euclidee e il secondo sul paradosso di Achille e la tartaruga; per entrambi vengono proposte schede didattiche ed esercizi da svolgere in classe con la guida dell'insegnante, o autonomamente. Si vuole che il rapporto tra l'alunno e il computer sia fatto di due momenti: il primo intuitivo/interrogativo atto a sviluppare la conoscenza critica dello studente che per cercare conferma dei dati ottenuti

dal calcolatore ricorre alla teoria. Il secondo applicativo in cui lo studente, dopo aver trovato conferma delle sue idee, applica la teoria e si pone dei nuovi quesiti.

Nel percorso delle geometrie non euclidee come prima cosa si introduce l'idea di sistema assiomatico formale. Ai nostri giorni, infatti, la teoria matematica è considerata essere un sistema ipotetico-deduttivo basato su concetti primitivi e assiomi. I primi sono dei termini non definiti, che diventano gli elementi fondamentali del discorso; i secondi sono enunciati privi di dimostrazione e riguardanti i concetti primitivi. Tutte gli altri concetti della teoria vengono definiti per mezzo di termini introdotti precedentemente, e le altre proposizioni, dette teoremi, vengono dedotti logicamente a partire da enunciati precedentemente accettati (assiomi) o dimostrati. In passato l'essenza di un sistema matematico veniva vista nella combinazione tra forma e contenuto, ovvero tra struttura logica e significato attribuitogli. Il punto di vista moderno sostiene che il sistema matematico ha una struttura puramente logica a cui si può associare un significato, ma non è un elemento necessario. Affinché ai ragazzi sia chiaro che l'importanza delle relazioni che legano gli oggetti e non il loro significato, proponiamo un esempio di sistema assiomatico formale. Prima di affrontare le geometrie non euclidee, introduciamo l'inversione circolare. Questa è una trasformazione del piano particolarmente utile come introduzione al modello di geometria iperbolica di Poincaré, in quanto fornisce un interessante esempio di trasformazione geometrica che, almeno in generale, non trasforma rette in rette. Gli studenti conoscono già le isometrie, le omotetie e le similitudini, sia dal punto di vista sintetico che analitico, sono quindi in grado di confrontare, cogliendo similitudine e differenze, le varie trasformazioni del piano. Diamo così le equazioni dell'inversione circolare di centro O e raggio 1 .

Definizione 0.0.1. Dato un cerchio C di centro O e raggio r , l'inversione circolare, σ , è la corrispondenza che al generico punto P del piano, distinto da O , associa il punto P' tale che O , P e P' sono allineati, P e P' sono dalla stessa parte rispetto

ad O, e $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$. Ad O non corrisponde alcun punto.

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{x^2+y^2} \\ y' = \frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Attraverso il software *Mathematica*, chiediamo ai ragazzi di scrivere dei programmi che permettano di disegnare, prima un punto e il suo trasformato, e di poter analizzare poi come vengono trasformate le rette. Quello che i ragazzi notano è che:

Retta passante per l'origine $\xrightarrow{\text{diventa}}$ Retta passante per l'origine

Retta secante $\xrightarrow{\text{diventa}}$ Circonferenza secante negli stessi punti della retta e passante per l'origine

Retta tangente $\xrightarrow{\text{diventa}}$ Circonferenza interna tangente nello stesso punto della retta e passante per l'origine

Retta esterna $\xrightarrow{\text{diventa}}$ Circonferenza interna passante per l'origine.

Indicando con il colore verde la retta iniziale e con il rosso quella trasformata. Notiamo che il computer ha problemi a capire cosa accade in prossimità dell'origine, questo perché più ci avviciniamo allo zero più il numero da calcolare sarà elevato in quanto viene richiesto di dividere un numero per uno sempre più piccolo. Dopo un certo numero di cifre decimali il computer non è più in grado di fare il calcolo perché questo richiederebbe troppa memoria e quindi si blocca, lasciando in questo caso, nel nostro disegno un 'buco' in prossimità del punto problematico. In questo caso ci viene in aiuto la teoria mediante l'introduzione di una definizione per l'inversione circolare dello zero.

Definizione 0.0.2. Definiamo l'inversione in 0 aggiungendo al piano un punto, detto 'punto all'infinito', e ponendo $\sigma(0) = \infty$, $\sigma(\infty) = 0$. In altre parole, l'inversione scambia il centro della circonferenza con il punto all'infinito².

²Nella geometria piana, l'inversione circolare è una particolare trasformazione che specchia i punti rispetto ad una data circonferenza. La trasformazione non è una trasformazione geometrica piana in senso stretto, perché sposta il centro della circonferenza all'infinito: si tratta piuttosto di una trasformazione della sfera ottenuta aggiungendo il punto all'infinito al piano tramite proiezione stereografica.

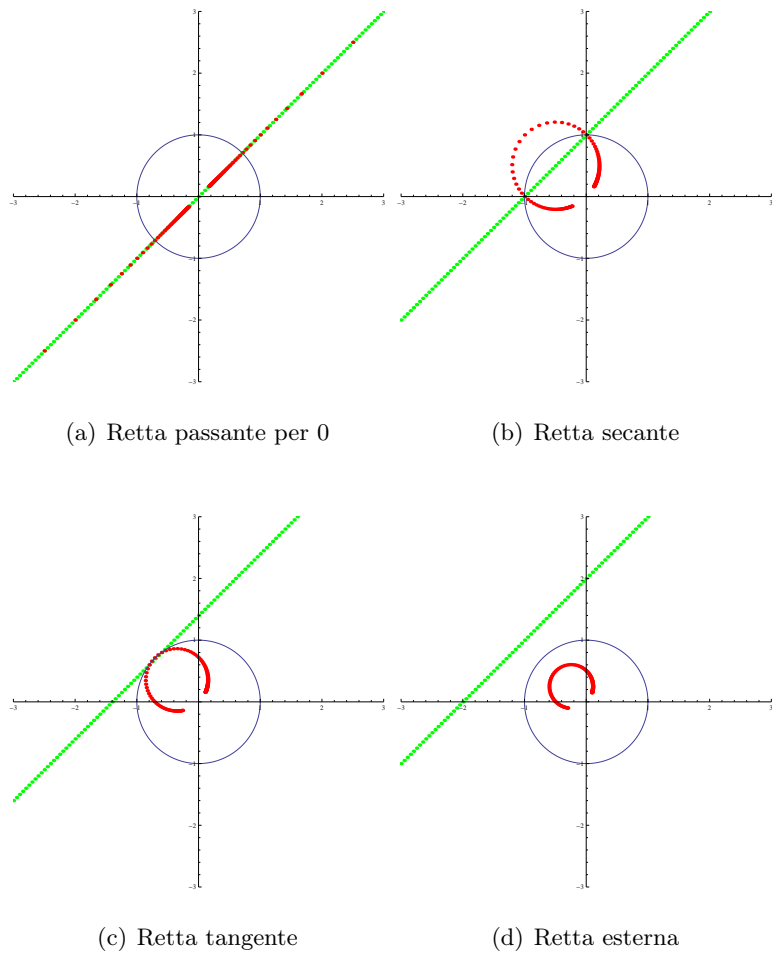


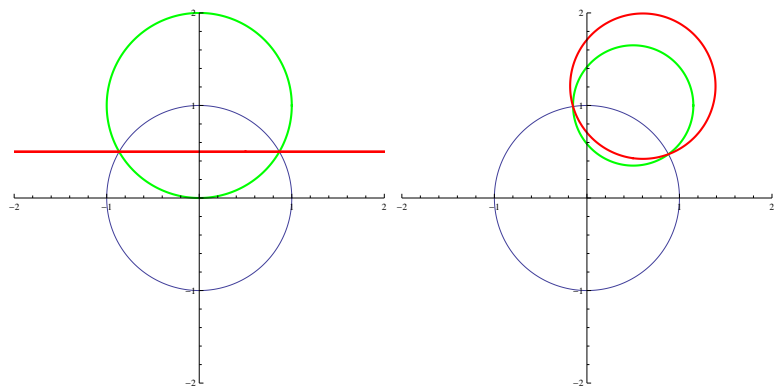
Figura 1: Inversione circolare di una retta

Come fatto precedentemente per le rette, trasformiamo anche le circonferenze e si nota che (figura 2):

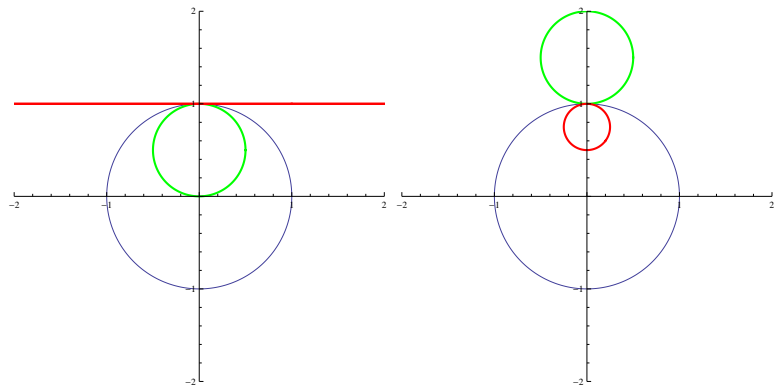
Circonferenza secante passante per 0 $\xrightarrow{\text{diventa}}$ Retta secante negli stessi punti della circonferenza;

Circonferenza secante non passante per 0 $\xrightarrow{\text{diventa}}$ Circonferenza secante negli stessi punti della circonferenza;

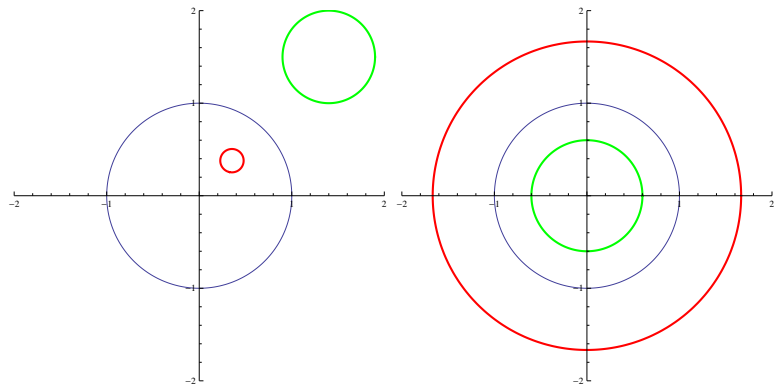
Circonferenza tangente passante per 0 $\xrightarrow{\text{diventa}}$ Retta tangente nello stesso punto della circonferenza;



(a) Circonferenza secante per 0 (b) Circonferenza secante non per 0



(c) Circonferenza tangente per 0 (d) Circonferenza tangente non in 0



(e) Circonferenza interna non per 0 (f) Circonferenza esterna non per 0

Figura 2: Inversione circolare di una circonferenza

Circonferenza tangente non passante per 0 $\xrightarrow{\text{diventa}}$ Circonferenza tangente nello stesso punto della circonferenza;

Circonferenza interna non passante per 0 $\xrightarrow{\text{diventa}}$ Circonferenza esterna non passante per 0;

Circonferenza esterna non passante per 0 $\xrightarrow{\text{diventa}}$ Circonferenza interna non passante per 0.

Durante tutto il percorso, i risultati laboratoriali vengono verificati mediante la teoria rigorosa, con teoremi e proposizioni e le relative dimostrazioni, sia da un punto di vista algebrico che geometrico. Infine diamo la definizione di angolo tra due curve:

Definizione 0.0.3. Date due curve γ e φ che si intersecano in un punto P , definiamo *angolo tra due curve*, l'angolo α che si crea dall'intersezione delle tangenti delle curve in P . Siccome si formano due angoli che sono supplementari, si sceglie per convenzione, quello per cui $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Attraverso questa definizione possiamo avere un'idea generale delle proprietà dell'inversione:

- E' una trasformazione involutiva;
- E' una trasformazione conforme;
- E' una trasformazione che non conserva l'orientamento;
- Tutti i punti della circonferenza di inversione sono uniti;
- Sono unite (non di punti uniti) le rette passanti per 0 (ma private del punto 0);
- I punti interni alla circonferenza di inversione si trasformano in punti esterni e viceversa;
- Sono punti uniti i punti di intersezione della retta con il cerchio di inversione.
- Sono unite le circonferenze ortogonali alla circonferenza di inversione.

Dove con circonferenze ortogonali intendiamo:

Definizione 0.0.4. Siano C e C' due circonferenze che si intersecano nei punti P e Q . Se le loro rette tangenti in quei punti sono ortogonali allora prendono il nome di *circonferenze ortogonali*.



Scheda didattica: Cerchi ortogonali

Presentiamo un'introduzione elementare al modello del disco di Poincaré della geometria iperbolica, proposto nel 1881 da Henri Poincaré (1854 - 1912) in un suo articolo. Il modello in questione è stato creato all'interno della geometria non euclidea. Il termine 'non euclidea' si riferisce al fatto che in questa geometria il V postulato di Euclide viene sostituito da uno nuovo. Definiamo il disco di Poincaré attraverso l'inversione circolare affrontata precedentemente:

Circonferenza d'inversione $C \xrightarrow{def}$ Orizzonte

Interno circonferenza d'inversione $C \xrightarrow{def}$ Piano

Punto interno alla circonferenza $C \xrightarrow{def}$ Punto

Diametro della circonferenza $C \xrightarrow{def}$ Retta del primo tipo

Circonferenza ortogonale non passante per $0 \xrightarrow{def}$ Retta del secondo tipo. In questo

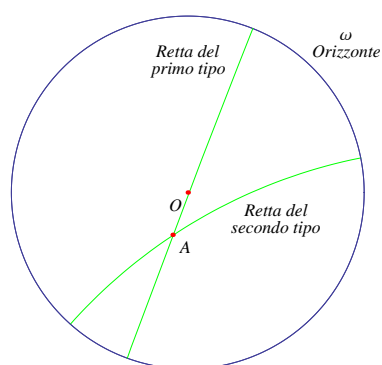


Figura 3: Disco di Poincaré

modello di piano iperbolico sono quindi validi gli assiomi di Euclide tranne quello delle parallele, infatti per un punto esterno ad una retta data passano infinite rette parallele. Gli assiomi della geometria iperbolica divengono, in seguito all'interpretazione proposta, proposizioni euclidee dimostrabili perché le 'rette' non sono altro, dal punto di vista euclideo, che archi di circonferenza. Inoltre in un triangolo iperbolico con angoli α , β , γ , la loro somma sarà minore di π , ovvero

$$S = \alpha + \beta + \gamma + k = \pi$$

dove k prende il nome di *difetto angolare*. Osservando quindi le analogie e le differenze con la geometria euclidea il passo successivo è stato quello di affrontare argomenti più complessi, in particolare la tassellazione del piano e del disco. Per concludere la sezione dedicata alle geometrie iperboliche, viene fatto un breve accenno anche al modello di Klein a quello del piano iperbolico. A questo punto si introduce il problema del V postulato di Euclide e una suddivisione leggermente più rigorosa delle geometrie in tre classi principali:

- *Geometria euclidea:*

è la geometria delle superfici a curvatura nulla, in essa vale l'assioma dell'esistenza e dell'unicità della parallela, e la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto.

- *Geometria iperbolica:*

è la geometria delle superfici a curvatura negativa (Lobačevskij), per un punto esterno a una retta passano più parallele e la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto.

- *Geometria ellittica:*

è la geometria delle superfici a curvatura positiva (Reimann), in essa non esistono rette parallele e la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di un angolo piatto.

Viene data infine una formulazione della geometria sferica, questa possiede una immediata interpretazione nella geometria euclidea, infatti, il suo modello, si pre-

senta come descritto dalla geometria della superficie di una sfera. Come per il disco di Poincarè, anche per quanto riguarda la geometria sferica, è stato chiesto ai ragazzi di sperimentare laboratorialmente per poi identificare delle proprietà la cui validità trova riscontro nella teoria. Osserviamo che in questa geometria, a differenza della conosciuta geometria euclidea, non esistono rette (cerchi massimi) con intersezione vuota; ovvero non esistono rette parallele! Infatti essendo la retta sferica definita come l'intersezione di S con il piano passante per O , ogni coppia di piani siffatti forma due cerchi massimi, avrà una retta comune passante per O ; quindi, due punti antipodali su S saranno comuni ai due cerchi massimi.

In questo modello di geometria sferica sono quindi validi gli assiomi di Euclide tranne quello delle parallele. Gli assiomi della geometria sferica divengono, in seguito all'interpretazione data, proposizioni euclidee dimostrabili perché le 'rette' non sono altro, dal punto di vista euclideo, che circonferenze. Una delle conseguenze più importanti è che in un triangolo sferico, con angoli α , β , γ , la loro somma sarà maggiore di π , ovvero

$$S = \alpha + \beta + \gamma - k = \pi$$

dove k prende il nome di *eccesso sferico* ed è minore di 2π .

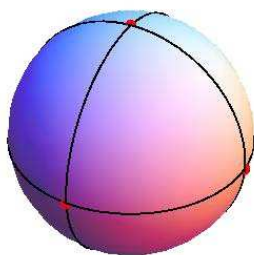


Figura 4: Triangolo sferico trirettangolo

Sono presenti numerose schede didattiche sia per esercizi teorici che per le lezioni laboratoriali; la maggior parte utilizzano il software *Mathematica*, ma è semplice

‘tradurle’ per *Geogebra*.

Nel percorso del paradosso di Achille e la tartaruga, vengono inizialmente presentati i modelli matematici e spiegata la loro importanza nella formulazione di una teoria valida. Viene fornito uno schema caratterizzato da quattro fasi:

Fase 1 *Formulazione del modello matematico*

Fase 2 *Analisi del problema reale: ipotesi e dati sperimentali*

Fase 3-4 *Risoluzione del modello matematico e previsioni sul fenomeno*

Fase 5 *Validazione del modello matematico*

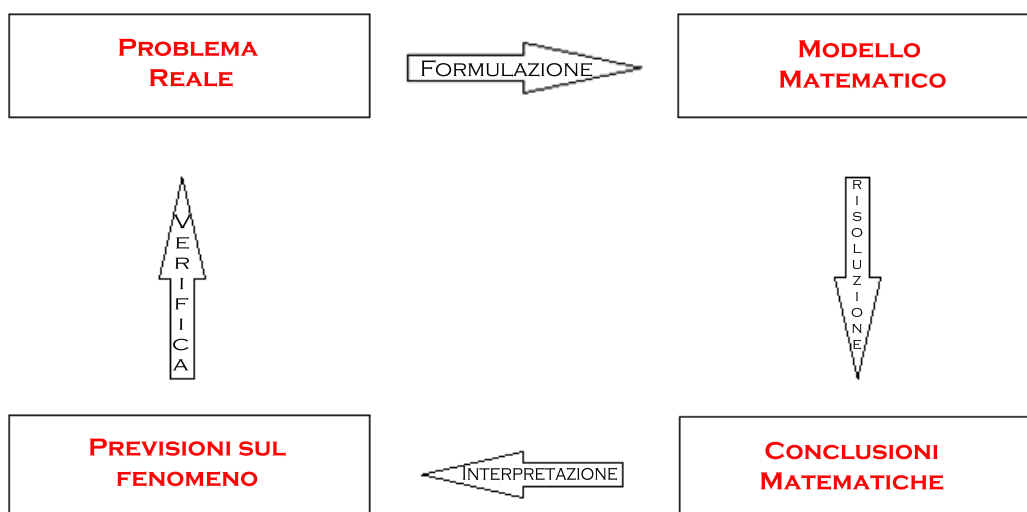


Figura 5: Schema per la costruzione di un modello matematico

Anche in questo caso viene proposto un esempio che permetta agli studenti di relazionarsi dati reali e non solo astratti. Viene fatto un breve richiamo sul moto rettilineo uniforme, proponendo una scheda didattica che permette un veloce ripasso mediante la risoluzione di un esercizio, che permetterà di risolvere successivamente il paradosso in maniera fisica. Il concetto di infinito è un'idea matematica di cui non è mai stato facile parlare, poiché in matematica non serve semplicemente introdurre definizioni accettabili, come in filosofia, ma bisogna anche dedurre una serie di conseguenze 'interessanti' e possibili applicazioni di quanto si è introdotto. Fin dall'antica Grecia il concetto intuitivo di moto continuo, fisico o metafisico, ha eluso tutti i tentativi di una formulazione matematica esatta. Non vi è nessuna difficoltà nel procedere passo dopo passo per una successione discreta di valori a_1, a_2, a_3, \dots , ma quando si ha a che fare con una variabile x che varia in un intervallo dell'asse dei numeri reali, è impossibile descrivere come x possa 'approssimarsi' al valore determinato x_1 , in modo tale da assumere consecutivamente e nel loro ordine di grandezza tutti i valori dell'intervallo. Come è noto, i punti di una retta formano un insieme denso, e dopo che è stato raggiunto un dato punto vi è sempre un punto 'successivo'. Certamente l'idea di continuo, nonostante sia radicata nella mente umana non può essere invocata per risolvere un'impossibilità matematica; deve rimanere una discrepanza tra l'idea intuitiva e il linguaggio matematico scelto per descrivere, in termini logici esatti, le approssimazioni della nostra intuizione, importanti dal punto di vista scientifico. Questa discrepanza è messa in evidenza dai paradossi di Zenone. Prendiamo in considerazione, ad esempio, il paradosso di Achille e la tartaruga, una delle descrizioni più famose del paradosso è quella dello scrittore argentino Jorge Luis Borges:

Achille, simbolo di rapidità, deve raggiungere la tartaruga, simbolo di lentezza. Achille corre dieci volte più svelto della tartaruga e le concede dieci metri di vantaggio. Achille corre quei dieci metri e la tartaruga percorre un metro; Achille percorre quel metro, la tartaruga percorre un decimetro; Achille percorre quel decimetro, la tartaruga percorre un

centimetro; Achille percorre quel centimetro, la tartaruga percorre un millimetro; Achille percorre quel millimetro, la tartaruga percorre un decimo di millimetro, e così via all'infinito; di modo che Achille può correre per sempre senza raggiungerla.³

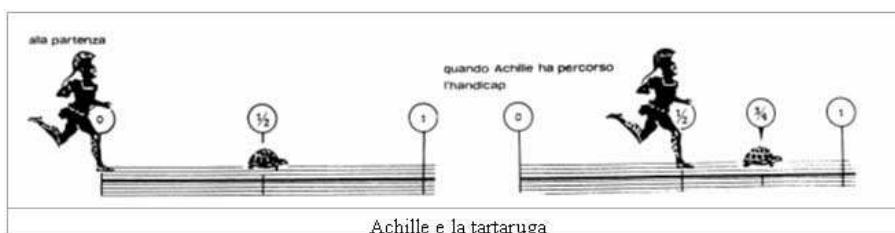


Figura 6: Achille e la tartaruga

Per risolvere il paradosso in maniera fisica, tracciamo le rette del moto e troviamo il punto in cui si intersecano. Questo punto rappresenta l'istante t_* e il punto x_* in cui Achille supera la tartaruga. L'espressione esplicita di t_* e di x_* può essere ottenuta imponendo un'uguaglianza tra le leggi orarie dei due moti. Ragionando nel dettaglio sul paradosso, il tempo in cui Achille percorre la distanza d_0 è $t_0 = \frac{d_0}{v_A}$. In quello stesso arco di tempo la tartaruga percorrerà uno spazio pari a $x_1 = v_T \cdot t_0 = v_T \cdot \frac{d_0}{v_A}$, quindi Achille si troverà nuovamente in uno svantaggio e così proseguendo non dovrebbe mai raggiungere la tartaruga. La soluzione del paradosso risiede nella seguente logica: nonostante il numero di intervalli di tempo in cui Achille raggiunge la tartaruga sia infinito, in accordo con quanto sostiene Zenone, la durata di ciascun intervallo diminuisce rispetto a quella dell'intervallo precedente; questa diminuzione è controllata dal rapporto tra la velocità della tartaruga e quella di Achille. L'origine del paradosso risiede nell'assumere, implicitamente, che un numero infinito d'intervalli di tempo implichi un tempo infinito. Questo sarebbe vero se tutti gli intervalli di tempo avessero la stessa durata. Abbiamo invece dimostrato che gli intervalli di tempo sono sempre più piccoli ed è quindi possibile sommarne un numero infinito, ottenendo un numero finito come totale.

³Jorge Luis Borges, 'Altre inquisizioni', Feltrinelli, 1973, 'Metamorfosi della tartaruga'



*Scheda didattica: Paradosso Achille e la tartaruga:
risoluzione fisica*

Per quanto riguarda la soluzione geometrica, la questione può essere rappresentata graficamente disegnando i singoli tratti di spazio percorsi da Achille sempre più piccoli e costruendo l'area di ciascuno, come in figura . Nella nostra costruzione abbiamo supposto che Achille avesse una velocità doppia rispetto alla tartaruga, e che il tratto iniziale di distacco fosse pari ad 1 km. Il punto in cui il triangolo si chiude, ovvero il punto 2, rappresenta il punto limite, quello dove i due sicuramente si incontreranno. Utilizzando la teoria delle similitudini tra triangoli, siamo in

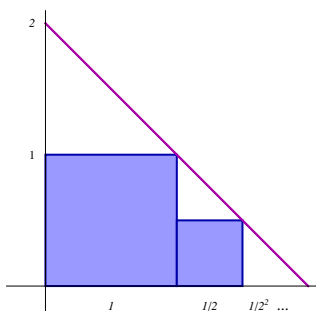


Figura 7: Costruzione della figura

grado di affermare che, indicando con $S_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$ la somma dei primi n tratti percorsi da Achille, allora per quanto grande sia n , si avvicina a 2, pur rimanendone sempre minore; inoltre la differenza tra 2 e S_n , per n opportunamente grande, si fa più piccola di un qualsiasi numero per quanto piccolo da noi scelto: è questa una proprietà caratteristica del limite definito nell'Ottocento da Weierstrass.

Definizione 0.0.5. Si dice che una successione di numeri S_n ammette limite S , ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \text{ t.c. } |S_n - S| \leq \varepsilon, \forall n \geq N;$$

ovvero per ogni epsilon maggiore di zero esiste un N tale che la differenza in modulo tra l' n -esimo elemento della successione S_n e il limite S è minore di epsilon per ogni n maggiore o uguale a N .

Con la nozione matematica di limite si può dunque disporre della soluzione del paradosso. Infatti, pur conservando l'idea di un processo e di una potenzialità illimitata, il limite ha il potere di risolvere tale potenzialità in una unità formale.

È perciò possibile esprimere concretamente la soluzione finale di un processo illimitato senza rinunciare al carattere potenziale di quest'ultimo: l'inesauribilità di questo processo resta un fatto irrinunciabile, ma non per questo dobbiamo accontentarci di soluzioni approssimate. Il valore 2 è un limite che 'comprende' tutta la successione, è una soluzione della potenzialità di sviluppo di tale successione, pur mantenendosi sempre al di fuori di questa.

A conclusione del lavoro è presente un'appendice nella quale sono riportati i codici sorgenti di *Mathematica*, che vengono richiamati nelle schede didattiche, in modo che l'insegnante possa utilizzarli come guida durante il lavoro laboratoriale.

Appendice A

Schede didattiche



Geometrie non Euclidee

SCHEDA INTRODUTTIVA

1) Nello spazio, definisci i seguenti enti:

- Circonferenza e cerchio: _____

- Superficie sferica e sfera: _____

- Enunciare i cinque postulati di Euclide: 1) _____

2) _____

3) _____

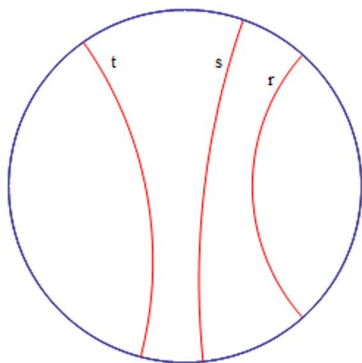
4) _____

5) _____

2) Stabilisci se, secondo te, tutti e cinque i postulati di Euclide soddisfano le caratteristiche di "evidenza" e "verità" richieste.

3) Secondo te, in che modo si può risolvere la questione del V postulato?

4) Osserva l'immagine e rispondi alle seguenti domande:



- Se consideriamo il cerchio come piano e la circonferenza come orizzonete allora le curve rosse possono essere definite come delle rette?

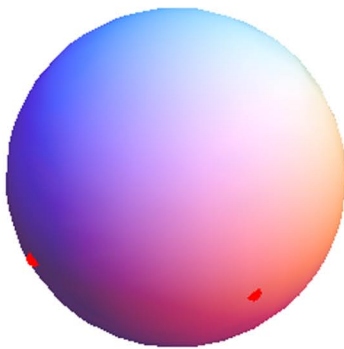
- Queste rette come sono tra loro?



Geometrie non Euclidee

SCHEDA INTRODUTTIVA

5) Osserva l'immagine e rispondi alle seguenti domande:

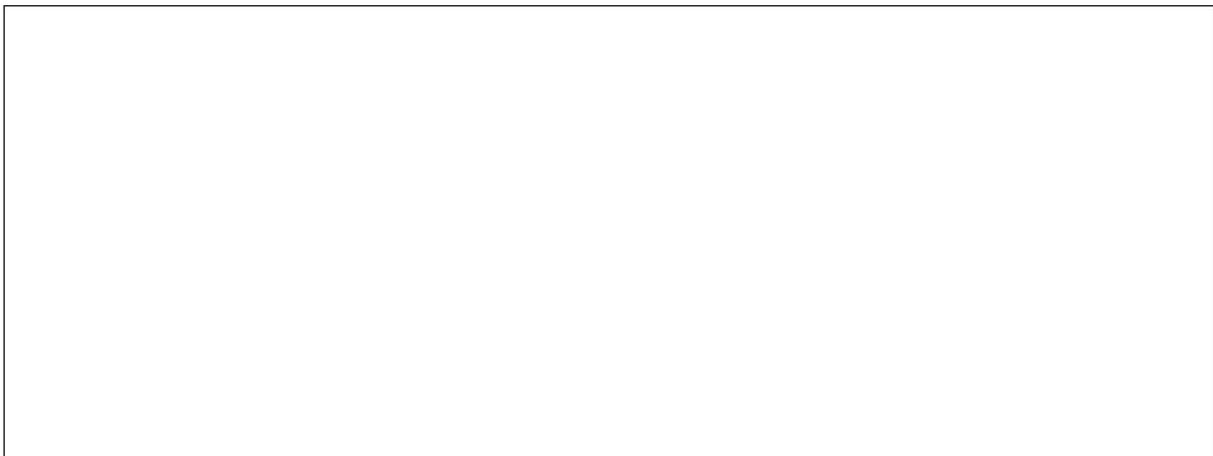


- Qual'è il percorso minimo, sulla superficie sferica, che congiunge i due punti?

- Possiamo definirle come "rette" sulla superficie?

- Riesci a disegnare due rette tra loro parallele?

6) Disegna un possibile ricoprimento, con singole tessere a forma di poligoni regolari, del piano Euclideo (simulato nel rettangolo qui sotto)

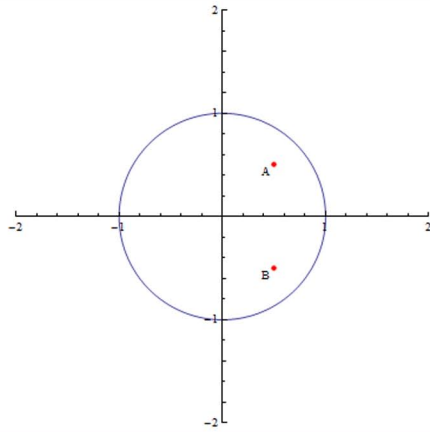


- Secondo te è possibile fare lo stesso per il cerchio e la superficie sferica prima osservati?

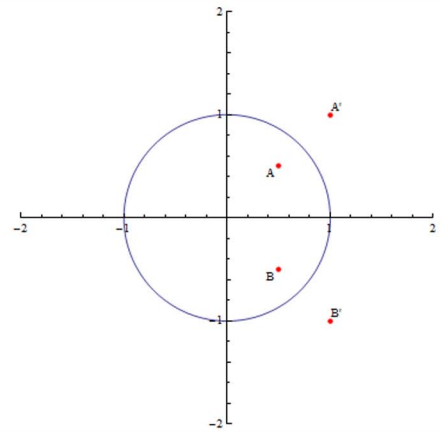


Disco di Poincaré

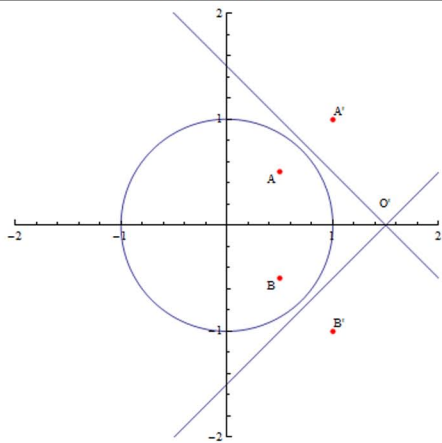
Costruiamo circonferenze ortogonali con l'uso di Mathematica



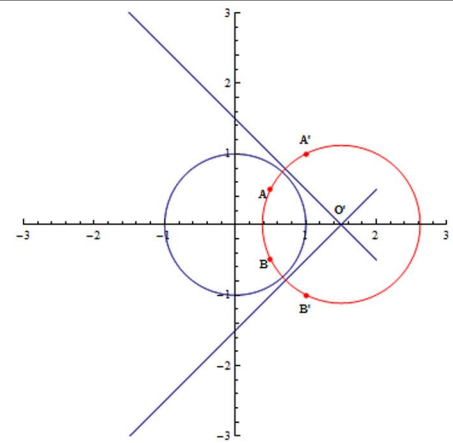
Disegnare la circonferenza d'inversione e i due punti per cui deve passare la circonferenza ortogonale:
Puntidisco



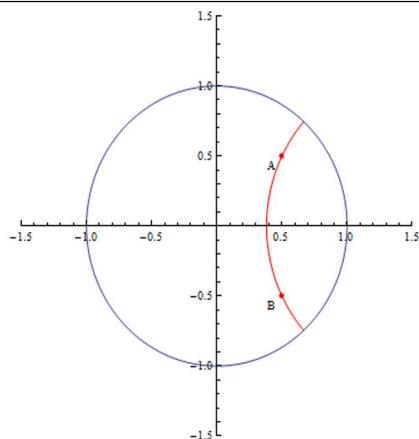
Trasformare i punti A e B tramite inversione circolare:
Puntidiscot



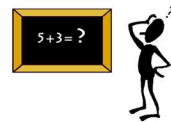
Disegna l'asse tra $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$, ed evidenzia l'intersezione:
Assepunti



Traccia la circonferenza di centro O' e raggio $O'A$:
Discrf



Evidenzia solo la parte di circonferenza interna al disco :
Discrf1



- 1) Scrivere un programma che invece dell'asse usi il calcolo della mediana;
- 2) Cosa accade se entrambi i punti appartengono al diametro?
- 3) E se uno dei due trova nell'origine?



Achille e la tartaruga

SCHEDA INTRODUTTIVA

1) Nella figura qui sotto individua tra A e B un terzo punto C:



- Tra C e B individua un punto D;
- Tra D e B individua un punto E;
- Procedendo con questo ragionamento quanti punti troverò?

- Questa è una proprietà della retta reale che prende il nome di:

2) E' possibile sommare un numero infinito di termini?

3) Se sommiamo un numero infinito di termini, ciascuno PIU' GRANDE del precedente, il risultato sarà:

4) Se sommiamo un numero infinito di termini, ciascuno PIU' PICCOLO del precedente, il risultato sarà:

5) Enunciare il paradosso di Achille e la tartaruga:

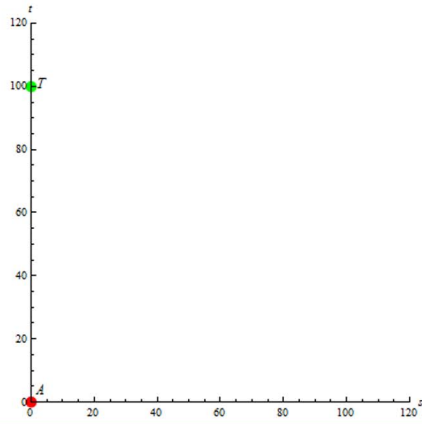


Achille e la tartaruga

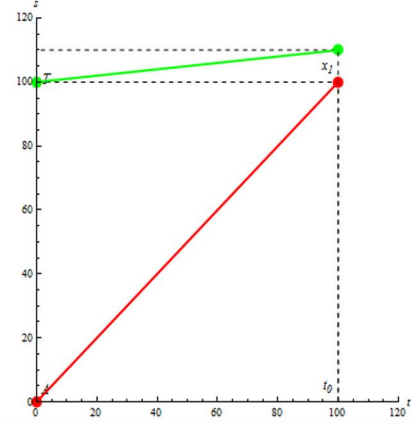
RISOLUZIONE FISICA

Achille e la tartaruga decidono di sfidarsi in una gara di corsa. Achille fa partire la tartaruga con un vantaggio di 100 metri.

La velocità di Achille $v_A = 1 \text{ m/s}$, mentre quella della tartaruga $v_T = 1/10 \text{ m/s}$

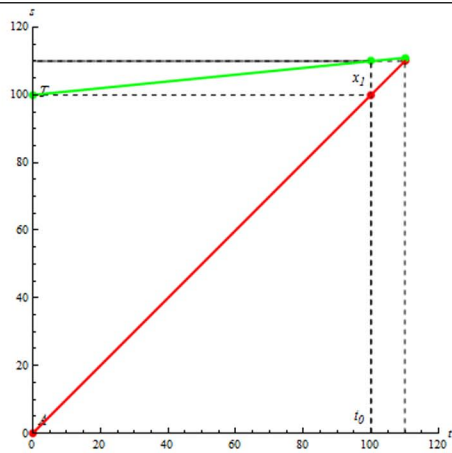


Disegnare la situazione iniziale.



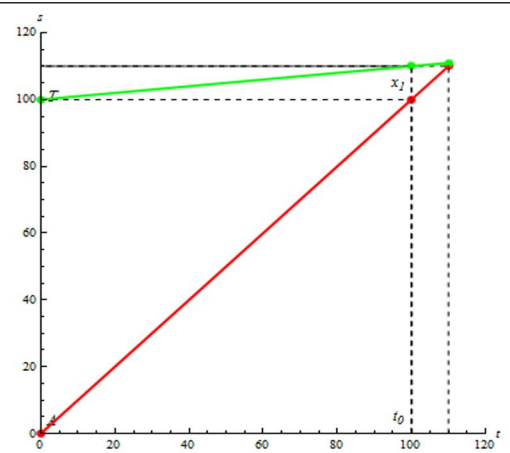
In quanto tempo Achille copre il distacco d_0 ?

Disegnare graficamente la situazione: **Achillefis**¹

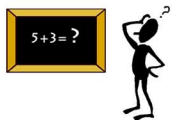


In quanto tempo Achille copre il distacco x_1 ?
Disegnare graficamente la situazione: **Achillefis**.

Variando il PlotRange dire se le due rette si intersecano.



Scrivere le due equazione del moto e graficarle mediante il comando : **Achillefis**.
Identificare graficamente t_* ed s_* .



Se continuiamo il procedimento Achille non dovrebbe mai raggiungere la tartaruga.

Come superiamo il paradosso?

1) A quanto è uguale l' n-esimo intervallo di tempo? _____

2) Scrivere t_* come somma: _____

3) Ripetere l'esercizio con i seguenti dati: $d_0=420 \text{ m}$; $v_A= 70 \text{ m/s}$; $v_T=10 \text{ m/s}$.

¹Il programma utilizzato è sempre il medesimo solo con i dati modificati

Appendice B

Linguaggio di programmazione

B.1 Creazione di cerchi ortogonali

```
tr[{x_, y_}] := {x/(x^2 + y^2), y/(x^2 + y^2)}
```

Con questo comando definiamo l'equazione dell'inversione circolare;

```
retta[{x1_, y1_}, {x2_, y2_}] :=  
If[x1 == x2, x == x1, y == y1 + (y2 - y1) (x - x1)/(x2 - x1)]
```

Scriviamo l'equazione canonica di una retta passante per due punti;

```
asseinv[{x1_, y1_}] := Block[{x, y},  
  {x2, y2} = tr[{x1, y1}];  
  {x3, y3} = {(x1 + x2)/2, (y1 + y2)/2};  
  If[y1 == y2, Return[y == y3]];  
  If[x1 == x2, Return[x == x3]];  
  If[(y1 != y2) && (x1 != x2),  
    Return[y ==
```



```
Expand[-1/
  Coefficient[retta[{x1, y1}, {x2, y2}][[2]], x] (x - x3) +
  y3]]];];
```

Dato un punto P, la funzione `asseinv`, calcola il suo trasformato P', il punto medio tra i due e la retta perpendicolare alla congiungente PP' e passante per il punto medio;

```
puntidisco[p1_, p2_] := Show[
  ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi},
    PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}},
  Graphics[{
    {Red, PointSize[Medium], Thick, Point[p1]},
    {Text["A", p1 - .07]},
    {Red, PointSize[Medium], Thick, Point[p2]},
    {Text["B", p2 - .07]}},
  ImageSize -> 500]
]
```

```
puntidiscot[p1_, p2_] := Show[
  ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi},
    PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}},
  Graphics[{
    {Red, PointSize[Medium], Thick, Point[p1]},
    {Text["A", p1 - .07]},
    {Red, PointSize[Medium], Thick, Point[p2]},
    {Text["B", p2 - .07]},
    {Red, PointSize[Medium], Thick, Point[tr[p1]]},
    {Text["A'", tr[p1] + .07]},
```

```

    {Red, PointSize[Medium], Thick, Point[tr[p2]]},
    {Text["B'", tr[p2] + .07]}
  ]
]

```

```

assepunti[p1_, p2_] := Show[
  ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi},
    PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}},
  Graphics[{
    {Red, PointSize[Medium], Thick, Point[p1]},
    {Text["A", p1 - .07]},
    {Red, PointSize[Medium], Thick, Point[p2]},
    {Text["B", p2 - .07]},
    {Red, PointSize[Medium], Thick, Point[tr[p1]]},
    {Text["A'", tr[p1] + .07]},
    {Red, PointSize[Medium], Thick, Point[tr[p2]]},
    {Text["B'", tr[p2] + .07]}
  ]},
  Plot[asseinv[p1][[2]], {x, -2, 2}],
  Plot[asseinv[p2][[2]], {x, -2, 2}]
]

```

```

discrf1[p1_, p2_] := Block[{xc, yc, r},
  xc = Solve[{asseinv[p1], asseinv[p2]}, {x, y}][[1, 1, 2]];
  yc = Solve[{asseinv[p1], asseinv[p2]}, {x, y}][[1, 2, 2]];
  r = Sqrt[(xc - p1[[1]])^2 + (yc - p1[[2]])^2];
  Show[
    ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi},
      PlotRange -> {{-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}},

```

```

Graphics[{
  {Red, PointSize[Medium], Thick, Point[p1]},
  {Text["A", p1 - .07]},
  {Red, PointSize[Medium], Thick, Point[p2]},
  {Text["B", p2 - .07]}
}],
{ParametricPlot[{xc, yc} + r {Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi},
  RegionFunction -> Function[{x, y, z}, x^2 + y^2 < 1],
  PlotStyle -> Red]}]
];

```

Nella funzione `discrfl`, i punti x_c, y_c , sono il centro della circonferenza ortogonale, e si trovano intersecando i due assi, mentre il raggio è la distanza tra il centro, appena trovato, ed il punto $p1$, dato in input.

B.1.1 Analisi del linguaggio di programmazione

Analisi linguaggio di programmazione	
Comando	Utilizzo
Block	$Block[\{x,y,\dots\}, espressione]$ Specifica che 'l'espressione' deve essere calcolata mediante variabili locali x, y
If	$If[condizione,t,f]$ Se la condizione è vera, svolge l'espressione t altrimenti quella f
Return	$Return [espressione]$ Restituisce 'l'espressione'
Expand	$Expand[espressione]$ Mostra tutti i termini dell'espressione'
	$Coefficient [espressione, termine]$

Coefficient	da il coefficiente del 'termine', presente nell'espressione'
PlotRange	<i>PlotRange</i> E' un'opzione delle funzioni grafico che permette di indicare un intervallo in cui graficarle
Thick	<i>Thick</i> E' un'opzione del grafico, specifica che le linee seguenti saranno disegnate in grassetto
Text	<i>Text</i> [<i>espressione,coordinate</i>] Permette di visualizzare un testo nel grafico nelle 'coordinate' indicate
Sqrt	<i>Sqrt</i> [<i>n</i>] Calcola la radice quadrata di <i>n</i>
Solve	<i>Solve</i> [<i>espressione,variabile</i>] Permette di risolvere l'espressione' rispetto la 'variabile'
RegionFunction	<i>RegionFunction</i> E' un'opzione per disegnare funzioni che specifica in quale regione del piano

B.2 Achille e la tartaruga: Risoluzione fisica

```
Achillefis[va_, vt_, d0_] := Show[
  Plot[{va*x, d0 + vt*x}, {x, 0, ((d0)/(va - vt)) + 10},
  PlotStyle -> {Directive[Thick, Red], Directive[Thick, Green]}],
  Graphics[{
    Text[Style["A", Italic, Medium], {5, 10}],
    Text[Style["T", Italic, Medium], {5, d0 - 10}],
    Text[Style["t0", Italic, Medium], {d0/va - 5, 10}],
    Text[Style["x1", Italic, Medium], {d0/va - 5, d0 + 5}],
    {PointSize[.02], Red,
    Point[{{0, 0}, {d0/va, d0}, {d0/va + d0*vt/va^2,
      d0 + d0*vt/va}}]},
    {PointSize[.02], Green,
    Point[{{0, d0}, {d0/va, d0 + vt*d0/va}, {d0/va + d0*vt/va,
      d0 + d0*vt/va + vt^2*d0/va}}]},
    {Dashed, Line[{{d0/va, 0}, {d0/va, d0}, {0, d0}}]},
    {Dashed,
    Line[{{d0/va + d0*vt/va^2, 0}, {d0/va + d0*vt/va^2,
      d0 + d0*vt/va}, {0, d0 + d0*vt/va}}]},
    {Dashed,
    Line[{{d0/va, 0}, {d0/va, d0 + vt*d0/va}, {0, d0 + vt*d0/va}}]},
    {Dashed,
    Line[{{d0/va + d0*vt/va, 0}, {d0/va + d0*vt/va,
      d0 + d0*vt/va + vt^2*d0/va}, {0, d0 + d0*vt/va + vt^2*d0/va}}]}
  ], Axes -> True, AxesLabel -> {t, s},
  PlotRange -> {{100, 120}, {100, 120}}]
]
```

Bibliografia

- [1] Richard Trudeau *La rivoluzione non euclidea* Bollati Boringhieri, 2004.
- [2] C. Covato, M. I. Venzo *Scuola e itinerari formativi dallo Stato pontificio a Roma capitale. L'istruzione primaria.* Unicopli, 2007
- [3] C. Covato, M. I. Venzo *Scuola e itinerari formativi dallo Stato pontificio a Roma capitale. L'istruzione secondaria.* Unicopli, 2010.
- [4] H.S.M. Coxeter *The trigonometry of Escher's woodcut 'Circle Limit III'.* Math. Intelligencer, 1996.
- [5] H.S.M. Coxeter *The trigonometry of hyperbolic tessellations.* Canad. Math. Bull, 1997.
- [6] Richard Courant, Herbert Robbins *Che cos'è la matematica?* . Bollati Boringhieri, 2000
- [7] Paola Vighi *Progettare lavorare scoprire.* Grafiche Step, 2010.
- [8] Piergiorgio Odifreddi *Una via di fuga. Il grande racconto della geometria moderna.* Mondadori, 2011.
- [9] Roger B. Nelsen *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking, Volume 1* MAA, 1993.
- [10] Raymond A. Serway, John W. Jewett *Principi di fisica, Volume 1* Edises, 2004.

- [11] Maria G. Bartolini Bussi, Michela Maschietto *Macchine Matematiche: Dalla Storia Alla Scuola* Springer, 2006.
- [12] <http://www.istruzione.it>
- [13] <http://www.federica.unina.it/smf/n/metodi-e-modelli-matematici>
- [14] <http://www.sicuring.it/ambiente-e-qualita/modelli-fisici-e-matematici/121-modello-fisico-matematico.html>
- [15] <http://progettomatematica.dm.unibo.it/NonEuclidea/File/ellittica/202.htm>
- [16] <http://webusers.fis.uniroma3.it/raimondi>
- [17] <http://www.mathaware.org/mam/03/essay1.html>
- [18] <http://www.matematicamente.it/tesi-didattica/Arcara-geometrie-non-euclidee.pdf>
- [19] http://www.math.iastate.edu/thesisarchive/MSM/Donald_C_MSM_F05.pdf
- [20] <http://www.whitman.edu/mathematics/SeniorProjectArchive/2006/valaasla.pdf>
- [21] <http://overseasmarkos.altervista.org/pg001.html>
- [22] <http://xmau.com/mate/art/infinito.html>
- [23] *Lezioni del corso di MC3, tenute dal professore Corrado Falcolini, presso l'Università Roma3, facoltà di matematica*